Corrigé

La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (1+x)e^{1-x^2}$.

1. φ est le produit de fonctions dérivables u et v sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. $u(x) = 1 + x$ et $v(x) = e^{1-x^2}$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -2xe^{1-x^2}$. Pour tout réel x, on a alors $\varphi'(x) = e^{1-x^2} + (1+x) \times (-2x)e^{1-x^2}$ soit $\varphi'(x) = e^{1-x^2}(1 - 2x(1+x))$ d'où $\varphi'(x) = (-2x^2 - 2x + 1)\,e^{1-x^2}$.

   φ' est le produit de fonctions dérivables p et q sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. $p(x) = -2x^2 - 2x + 1$ et $q(x) = e^{1-x^2}$ donc $p'(x) = -4x - 2$ et $q'(x) = -2xe^{1-x^2}$. Ainsi, pour tout réel x,

   $\varphi''(x) = (-4x-2)e^{1-x^2} - 2x(2x^2-4x-1)e^{1-x^2}$ donc $\varphi''(x) = (-4x-2-2x(-2x^2-2x+1))e^{1-x^2}$ et ainsi $\varphi''(x) = (4x^3+4x^2-6x-2)e^{1-x^2}$.

2. Pour tout réel x, $2(x-1)(2x^2+4x+1)e^{1-x^2} = (2x-2)(2x^2+4x+1)e^{1-x^2} = (4x^3+8x^2+2x-4x^2-8x-2)e^{1-x^2} = (4x^3+4x^2-6x-2)e^{1-x^2} = \varphi''(x)$. Comme $e^{1-x^2} > 0$, le signe de $\varphi''(x)$ dépend de celui de $2(x-1)(2x^2+4x+1)$.

   On a $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

   On calcule le discriminant de $2x^2+4x+1$: $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$. Les deux racines sont alors $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{8}}{2\times 2} = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{8}}{2\times 2} = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$.

   Le polynôme est donc positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Le tableau de signes de $\varphi''(x)$ est donc :

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$2(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit que φ est convexe sur $\left[\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $[1; +\infty[$.

   Elle est concave sur $\left]-\infty; \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

   Les abscisses des points d'inflexion sont donc $\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$ et 1.